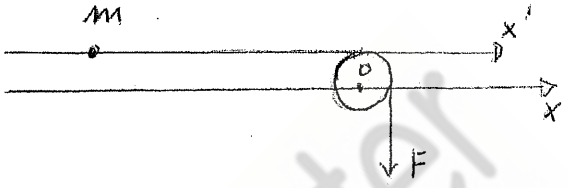
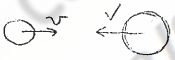
Compito del 10/1/13

1) La massa m di figura può scorrere senza attrito lungo l'asse x' ed il centro O della carrucola lungo l'asse x. Il filo non struscia sulla carrucola, omogenea, di massa M e raggio R e l'estremità libera del filo è sottoposta ad una forza d'intensità F sempre ortogonale agli assi x ed x',mentre l'altro estremo è connesso a m. Determinare il moto di m e di O sapendo che inizialmente erano fermi.



Risposta:

2) Due dischi omogenei, di ugual materiale di raggi r e R ($>r$) corrono l'uno verso l'altro su di un piano con velocità v e V. Determinare le condizioni da soddisfare se si vuole che dopo un loro urto elastico il grande scavalchi il piccolo che si suppone non staccarsi dal piano. (si trascuri la presenza della gravità). Ogni attrito è trascurabile.
Risposta:



3) La velocità massima della mia automobile è di 105 Km/h. Dire da quale numero sarà espressa se si vuole adottare un sistema di unità di misure per cui sia:

$$\begin{cases} \hbar = 1 \\ G = 3 \\ c = 5 \end{cases}$$

($\hbar$ è la "costante di Plank ridotta" che vale 1.054×10^{-27} erg s, G è la costante di gravitazionale universale, che vale 6.67×10^{-11} N m^2/kg^2 e c è la velocità della luce nel vuoto, pari a 3×10^{10} cm/s)
Consiglio: prima di rispondere riflettere e poi pensare ed infine... non restare perplessi per la banalità della domanda!
Risposta:

1) *Risposta:* Sia τ la tensione della fune tra m e la carrucola (mentre F è la tensione del filo tra la carrucola e l'estremo dove è applicata F). la prima cardinale applicata a m e M permette di scrivere:

$$\begin{cases} \tau = m\ddot{x}' \\ \tau = -M\ddot{x} \end{cases} \rightarrow -\tau = M\ddot{x}$$

La seconda cardinale proiettata lungo z (asse perpendicolare al foglio e da lui uscente) applicata alla carrucola con polo O, permette di scrivere:

$$(\tau - F)R = J\dot{\omega}$$

con J momento d'inerzia baricentrale della carrucola (= $1/2\ MR^2$). Il fatto poi che il filo non striscia sulla carrucola, permette di scrivere:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[x(t) - x'(t)] = \omega R \Leftrightarrow \ddot{x}(t) - \ddot{x}'(t) = \dot{\omega} R \end{cases}$$

Senza perdita di generalità si può porre: x'(0)=x(0)=0 e quindi subito, risolvendo il sistema, con le condizioni iniziali e ricordando pure che all'inizio il sistema è fermo, si ha:

$$x'(t) = \frac{R^2 MF}{2[J(m+M) + R^2 mM]} t^2 \quad x(t) = -\frac{R^2 mF}{2[J(m+M) + R^2 mM]} t^2$$

Se si vuole, sostituendo al momento J la sua espressione, si ha:

$$x'(t) = \frac{F}{3m+M} t^2 \quad x(t) = -\frac{mF}{M(3m+M)} t^2 .$$

2)*Risposta:* Mettiamoci su di un sistema di riferimento inerziale che si muova con la velocità v. La velocità del disco piccola è nulla, mentre chiamo $-V$ la velocità di M. Sia θ l'angolo formato dalla congiungente i due centri con il piano (asse x) al momento dell'urto (è: $\sin(\theta) = \frac{R-r}{R+r}$).La forza impulsiva che sorge sarà diretta come tale congiungente. La prima cardinale applicata a M lungo l'asse x e y permette di scrivere:

$$\begin{cases} I\cos(\theta) = M(V_{finale\ x} + V) \\ I\sin(\theta) = MV_{finale\ y} \end{cases}$$

applicata a m permette di scrivere:

$$-I\cos(\theta) = mv_{finale\ x}$$

La conservazione dell'energia cinetica (urto elastico!) permette di scrivere:

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv_{finale\ x}^2 + \frac{1}{2}M(V_{finale\ x}^2 + V_{finale\ y}^2)$$

Risolvendo il sistema delle 4 equazioni nelle 4 incognite, si ha:

$$V_{finale\ x} = \frac{-2m\sin^2(\theta) + m - M\cos^2(\theta)}{M\cos^2(\theta) + m} V$$

$$v_{finale\ x} = -2\frac{M\cos^2(\theta)}{M\cos^2(\theta) + m} V$$

Affinché avvenga "lo scavalcamento" occorre che sia $v_{finale\ x} > V_{finale\ x}$. cioè occorre che sia:

$$(2m+M)\cos^2(\theta) - m < 0 \rightarrow \cos^2\theta < \frac{m}{2m+M}$$

Siccome i dischi sono omogenei, la massa può essere sostituita con il quadrato del raggio, per cui deve essere:

$$\cos^2(\theta) < \frac{r^2}{(2r^2 + R^2)}$$

Ma dalla geometria segue subito: $\sin(\theta) = \frac{R-r}{R+r} \Leftrightarrow \cos^2(\theta) = \frac{4rR}{(R+r)^2}$

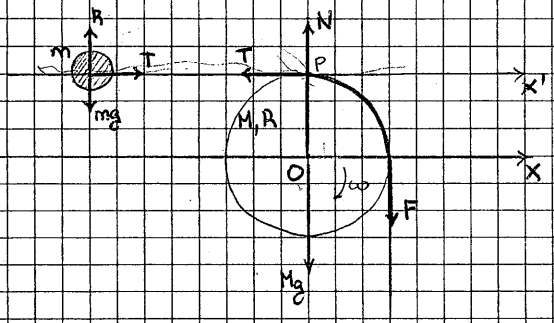
Deve dunque essere: $\frac{4R}{(R+r)^2} < \frac{r}{(2r^2+R^2)}$ Relazione **mai verificata,quindi non vi sarà scavalcamento.**

3) *Risposta:* 105 Km/h sono $\frac{105}{3600} Km/s$ il rapporto quindi tra la velocità della mia auto e quella della luce è allora: $r = \frac{105}{3600 \times 300000}$. Tale rapporto è, è evidente, indipendente da qualunque unità di misura usata e quindi, se con certe unità di misura la velocità della luce risulta pari a 5, quella della mia auto sarà espressa dal numero:

$$\frac{105}{3600 \times 300000} \times 5 = 4.861 \times 10^{-7} .$$

Correzione compito 10/01/13

1)



Il filo non struscia sulla carrucola M, R
F ortogonale
Inizialmente tutto fermo

Determinare il moto di m e O.

Il cilindro effettua un moto rotatorio attorno ad O e rettilineo lungo x. Applico:

1ª EQ. CARD. per M lungo x

1ª EQ. CARD. per m

2ª EQ. CARD. a M con polo O e proiettata lungo z (asse ⊥ uscente)

$$\begin{cases} -T = M\ddot{x}_G \rightarrow T = -M\ddot{x}_G = -M\ddot{x} \\ T = m\ddot{x}' \\ FR - TR = J\dot{\omega} \end{cases} \qquad \text{con } J_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$$

incognite: $T, \ddot{x}_G, \ddot{x}', \dot{\omega}$

Manca una relazione cinematica:

IL FILO NON STRUSCIA → la distanza di m da P diminuisce di quanto avanza il disco (ωR)

$$v_b^r = v_P^r$$
$$\dot{x}' - \dot{x} = \omega R$$
$$\dot{x} - \dot{x}' = \omega R$$
$$\dot{x}(t) - \dot{x}'(t) = \omega R$$

$$\frac{d}{dt}[x(t) - x'(t)] = \omega R \Rightarrow \dot{x}(t) - \dot{x}'(t) = \dot{\omega} R$$

Oppure (Michael)

$\Delta x' = R\Delta\theta + \Delta x_G$ (arco di circonf. dovuto alla rotaz. + spostam. su x)

$$\ddot{x}' = R\ddot{\theta} + \ddot{x}_G$$
$$R\dot{\omega} = \ddot{x}' - \ddot{x}_G$$
$$\dot{\omega} = \frac{\ddot{x}' - \ddot{x}_G}{R}$$

Sistema:

$$\begin{cases} T = -M\ddot{x}_G \\ T = m\ddot{x}' \\ F - T = \frac{1}{2}MR\dot{\omega} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}' = -M\ddot{x}_G \rightarrow \ddot{x}_G = -\frac{m}{M}\ddot{x}' \\ F - m\ddot{x}' = \frac{1}{2}M\ddot{x}' - \frac{1}{2}M\ddot{x}_G \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow F - m\ddot{x}' = \frac{1}{2}M\ddot{x}' + \frac{1}{2}M\frac{m}{M}\ddot{x}' \rightarrow F = \ddot{x}'\left(m + \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}m\right) = \ddot{x}'\left(\frac{1}{2}M + \frac{3}{2}m\right)$$

$$\rightarrow \ddot{x}' = \frac{2F}{3m+M} \qquad \ddot{x}_G = -\frac{2Fm}{(3m+M)M}$$

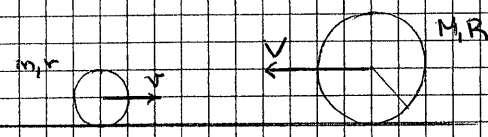
I 2 moti sono quindi UNIFORMEMENTE ACCELERATI con velocità iniziali nulle. Le leggi sono allora:

$$x'(t) = \underset{0}{\dot{x}'(0)} + \underset{0}{\dot{x}'(0)}t + \frac{1}{2}\ddot{x}'t^2 = \frac{F}{3m+M}t^2$$

$$x_G(t) = \underset{0}{x(0)} + \underset{0}{\dot{x}(0)}t + \frac{1}{2}\ddot{x}t^2 = \frac{-mF}{M(3m+M)}t^2$$

inizialmente è tutto fermo

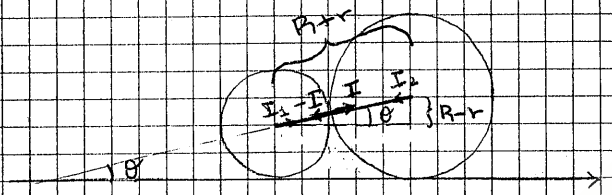
2)



urto elastico
NO gravità, NO attriti

Condizioni per cui il disco grande scavalchi il piccolo.

Poniamoci in un s.d.r. inerziale solidale a m, che si muove con velocità v.
In questo sistema m ha velocità 0, mentre M avrà velocità $-V$.



Chiamo:
θ = angolo formato dalla congiungente i due centri con il piano (asse x)

Al momento dell'urto ho:

$$\sin\theta = \frac{\text{opp.}}{\text{ip.}} = \frac{R-r}{R+r}$$

La forza impulsiva che sorge sarà diretta come tale congiungente.

Applico la 1ª CARD. (IMPULSIVA durante l'urto):

1ª CARD. a M

$$\begin{cases} I_x = MV_{f_x} - M(-V) \\ I_y = MV_{f_y} - 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I\cos\theta = M(V_{f_x} + V) \\ I\sin\theta = MV_{f_y} \end{cases}$$

V_{f_y}: SCAVALCAMENTO

1ª CARD. a m

$$-I_x = mv_{f_x} - 0 \rightarrow -I\cos\theta = mv_{f_x}$$

nel s.d.r. scelto

urto elastico $\Rightarrow$ conserva. E^{cin}

$$\frac{1}{2}MV^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_{f_x}^2 + \frac{1}{2}M(V_{f_x}^2 + V_{f_y}^2)$$

Sistema:

$$\begin{cases} MV^2 = mv_x^2 + MV_x^2 + MV_y^2 \\ I\cos\theta = -mv_x \\ I\sin\theta = MV_y \\ I\cos\theta = MV_x + MV \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = \dfrac{-mv_x}{\cos\theta} \\ V_y = \dfrac{I\sin\theta}{M} = \dfrac{-mv_x\, tg\theta}{M} \\ V_x = \left(\dfrac{-mv_x}{\cos\theta}\sin\theta - MV\right)\dfrac{1}{M} = \dfrac{-mv_x - MV}{M} \end{cases}$$

$$\Rightarrow MV^2 = mv_x^2 + M\frac{(-mv_x - MV)^2}{M^2} + M\frac{(-mv_x\, tg\theta)^2}{M^2}$$

$$M^2V^2 = Mmv_x^2 + m^2v_x^2 + M^2V^2 + 2mMVv_x + m^2v_x^2 tg^2\theta$$

$$(Mm + m^2 + m^2 tg^2\theta)v_x^2 + 2mMVv_x = 0$$

$$v_x\left[(Mm + m^2 + m^2 tg^2\theta)v_x + 2mMV\right] = 0$$

$$\rightarrow v_x = \frac{-2MmV}{Mm + m^2 + m^2\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{-2MV\cos^2\theta}{M\cos^2\theta + m\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1}} = \frac{-2M\cos^2\theta}{M\cos^2\theta + m}\cdot V$$

$$\rightarrow V_x = -\frac{m}{M}\left[\frac{-2MV\cos^2\theta}{M\cos^2\theta+m}\right] - V = \frac{+2mV\cos^2\theta}{M\cos^2\theta+m} - V =$$

$$= \frac{+2mV\cos^2\theta - MV\cos^2\theta - mV}{M\cos^2\theta+m} =$$

$$= \frac{V(+2m[1-\text{sen}^2\theta] - M\cos^2\theta - m)}{M\cos^2\theta+m} =$$

$$= \frac{V(+2m - 2m\,\text{sen}^2\theta - M\cos^2\theta - m)}{M\cos^2\theta+m} = \left(\frac{-2m\,\text{sen}^2\theta + m - M\cos^2\theta}{M\cos^2\theta+m}\cdot V\right)$$

Condizione di SCAVALCAMENTO:

$$\boxed{v_{f_x} > V_{f_x}}$$

ALTRIMENTI LE 2 MASSE SI SAREBBERO ALLONTANATE

$$\frac{-2M\cos^2\theta}{M\cos^2\theta+m}\cdot V > \frac{-2m\sin^2\theta + m - M\cos^2\theta}{M\cos^2\theta+m}\cdot V \rightarrow$$

$$-2M\cos^2\theta > -2m\sin^2\theta + m - M\cos^2\theta$$

$$-M\cos^2\theta > -2m\sin^2\theta + m$$

$$-M\cos^2\theta > m(1-2\sin^2\theta)$$

$$M\cos^2\theta < m(-1+2\sin^2\theta) = -m+2m-2m\cos^2\theta$$

$$(1-\cos^2\theta)$$

$$(M+2m)\cos^2\theta < m$$

$$\cos^2\theta < \frac{m}{2m+M} = \frac{r^2}{2r^2+R^2}$$

poiché i dischi sono omogenei la massa si sostituisce con il quadrato del raggio $m \approx r^2$

ma poiché $\text{sen}^2\theta = \frac{(R-r)^2}{(R+r)^2}$ ho che:

$$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1 - \frac{(R-r)^2}{(R+r)^2} = \frac{(R+r)^2-(R-r)^2}{(R+r)^2} =$$

$$= \frac{(R+r+R+r)\cdot(R+r-R+r)}{(R+r)^2} = \frac{2R\cdot 2r}{(R+r)^2} = \frac{4Rr}{(R+r)^2}$$

Quindi:

$$\frac{4Rr}{(R+r)^2} < \frac{r^2}{2r^2+R^2}$$

MAI verificata

⇓

NO scavalcamento!